

Uma questão enviada pelo aluno Túlio Maravilha (UEA – ENS – 3º período de Matemática) em 10/11/2017

(Olimpíada dos EUA) Calcule o valor de n em

$$\sum_{j=1}^n (1+i)^j = 31+i, \text{ onde } i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}.$$

Uma solução: (Professor Alessandro Monteiro)

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (1+i)^j &= (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^n \\ &= (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}, \text{ soma de uma P.G de razão } (1+i) \\ &= \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i} \end{aligned}$$

então

$$\frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i} = 31+i \Leftrightarrow (1+i)^{n+1} = 32i$$

$$\Leftrightarrow 1+i = (2i)^{\frac{5}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^2 = (2i)^{\frac{10}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2i = (2i)^{\frac{10}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{n+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow n = 9.$$

matemáticamonteiro
REFORÇO UNIVERSITÁRIO
A matemática que você entende.