



Disciplina: Matemática Elementar 2		Valor Total: 10,0
Prof.: Alessandro Monteiro		
Aluno(a): GABARITO MONTEIRO		
Prova Final		Data: 04 de Dezembro de 2017
Curso: Licenciatura em Matemática		Período: 2017/2
Crítérios de Avaliação: <ul style="list-style-type: none">• Não é permitido fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor.• O Aluno só poderá entregar a prova 60 minutos após seu início.• Essa avaliação é individual e sem consulta.• Somente os espaços que sobram abaixo de cada questão e o verso desta folha poderão ser usados como rascunhos.• Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna 2 ao lado das perguntas.• É proibido o uso de aparelhos celulares ou similares.• Todo material do aluno é de uso individual, sendo proibido qualquer tipo de empréstimo.		
QUESTÕES		RESPOSTAS À CANETA
<p>01. (vale 1,0 ponto) Para x não nulo, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, a soma $1 + \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}^3x + \dots$ é igual a:</p> <p>a) $\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x - \operatorname{sen}x}$ b) $\frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen}x}$ c) $\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x + \operatorname{sen}x}$ d) $\frac{\cos x}{\cos x - \operatorname{sen}x}$</p> <p>Justifique!</p>		<p>Resposta: d)</p> <p>Justificativa:</p> <p>A soma $S = 1 + \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}^3x + \dots$ é uma PG infinita de razão $q = \operatorname{tg}x$.</p> <p>Logo,</p> $S = \frac{a_1}{1 - q}$ $= \frac{1}{1 - \operatorname{tg}x}$ $= \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}$ $= \frac{\cos x}{\cos x - \operatorname{sen}x}.$



02. (vale 2,5 pontos cada item) Resolva os três itens abaixo.

i) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

ii) Dado o número complexo

$$z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.

iii) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

Justifique!

Respostas:

i) $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ii) $n = 8$

iii) $p(z) = z^8 + 256$

Justificativas:

i) Por ser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, temos

$$\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{8}\right) = 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \frac{3\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

E pela relação fundamental podemos encontrar facilmente

$$\text{que } \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

ii) Note que

$$z = 2\cos \frac{3\pi}{8} + 2i\operatorname{sen} \frac{3\pi}{8}$$

Assim, pela primeira fórmula de Moivre,

$$z^n = 2^n \left(\cos \frac{3n\pi}{8} + i\operatorname{sen} \frac{3n\pi}{8} \right)$$

Deste modo, se queremos que z^n seja real, então $\operatorname{sen} \frac{3n\pi}{8} = 0$. Logo, $n = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real é $n = 8$.

iii) Usando os itens anteriores, temos que

$$z^8 = 2^8 (\cos 3\pi + i\operatorname{sen} 3\pi) = 2^8 (-1) = -256.$$

E, obviamente, $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ é raiz de

$$z^8 = -256.$$

Como $p(z) = z^8 + 256$ não possui raiz real e tem coeficientes inteiros, então é uma resposta para este último item.



03. (vale 1,5 pontos) Resolva a equação

$$x^2 - x - \cos y + 1.25 = 0.$$

Justifique!

Resposta:

$$x = 0,5 \text{ e } y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Justificativa:

Temos que

$$\begin{aligned}x^2 - x - \cos y + 1.25 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x + 0,25 + 1 - \cos y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 0,5)^2 + 1 - \cos y = 0\end{aligned}$$

E como $\cos y \leq 1$. Isto é, $1 - \cos y \geq 0$, então deve ocorrer que

$$(x - 0,5)^2 = 0 \text{ e } 1 - \cos y = 0.$$

Ou seja,

$$x = 0,5 \text{ e } \cos y = 1.$$

Logo,

$$x = 0,5 \text{ e } y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$