Universidade do Estado do Amazonas

Professor Alessandro Monteiro

26 de Julho de 2018

PROJETO DE EXTENSÃO

Resoluções de Problemas de Análise Real I

5º Encontro/Parte I: Limites de Funções

Parte I: Limites

5.1 O Limite de uma Função

Um conceito fundamental no cálculo de uma variável é o conceito do limite de uma função. Neste encontro, apresentamos a definição de limite, algumas propriedades e resolveremos alguns problemas clássicos.

Definição 5.1.1. Seja f uma função real com domínio $A \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de A. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é limite de f quando x tende a $a \in \mathbb{R}$, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ com a propriedade $0 < |x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Exercício 3.1.1. Prove através da definição que

a) $\lim_{x \to 1} (2018x - 2017) = 1$;

b) $\lim_{x \to -2} (2x^3 + x^2 + 5) = -7$.

Solução (a). Seja dado $\varepsilon > 0$. Escolhendo-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2018}$ e assumindo-se que $0 < |x - 1| < \delta$, $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$|(2018x - 2017) - 1| = |2018x - 2018| = 2018|x - 1| < 2018 \cdot \delta = 2018 \cdot \frac{\varepsilon}{2018} = \varepsilon.$$

Portanto, pela definição de limite de uma função, segue que $\lim_{x \to 1} (2018x - 2017) = 1$.

Solução (b). Seja dado $\varepsilon > 0$. Escolhendo-se $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{33}\right)$ e assumindo-se que $0 < |x - (-2)| < \delta$, $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$|(2x^3 + x^2 + 5) - (-7)| = |2x^3 + x^2 + 12| = |x + 2||2x^2 - 3x + 6| < \delta \cdot |2x^2 - 3x + 6|.$$

E também,

$$0 < |x + 2| < \delta \leq 1 \;\Rightarrow\; -3 < x < -1 \;\Rightarrow\; 11 < 2x^2 - 3x + 6 < 33.$$

Logo,

$$|(2x^3 + x^2 + 5) - (-7)| = \delta \cdot 33 \leq \frac{\varepsilon}{33} \cdot 33 = \varepsilon.$$

Portanto, pela definição de limite, segue que $\lim_{x \to -2} (2x^3 + x^2 + 5) = -7$.

Exercício 3.1.2. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ se } x\in\mathbb{R} \text{ e } x \text{ é racional,}\\ 1 \text{ se } x\in\mathbb{R} \text{ e } x \text{ é irracional.}\end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe para todo $a\in\mathbb{R}$.

Solução. Seja $a\in\mathbb{R}$. Assuma que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ para algum $L\in\mathbb{R}$. Assim para todo $\varepsilon>0$ existe um $\delta>0$ tal que para todo $x\in D(f)$ com a propriedade $0<|x-a|<\delta$ temos que $|f(x)-L|<\varepsilon$. Como $x\in(a-\delta,a+\delta)$, $x\neq a$, e também tanto o conjunto dos números racionais quanto dos números irracionais são densos em $\mathbb{R}$ então temos que se x for racional

$$|f(x)-L|=|0-L|=|L|<\varepsilon.$$

E se x for irracional então

$$|f(x)-L|=|1-L|<\varepsilon.$$

E com isso temos que

$$1=|(1-L)+L|\le|1-L|+|L|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Mas, tomando-se $\varepsilon=\dfrac{1}{6}$, temos a contradição $1<\dfrac{1}{3}$. Logo, o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe para todo $a\in\mathbb{R}$.

Exercício 3.1.3. Prove que $\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe.

Solução 1.

Usaremos o seguinte proposição:

Seja f uma função com domínio $A\subset\mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de A. Para que o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, é necessário e suficiente que se tenha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=L$ para toda sequência de pontos $x_n\in A-\{a\}$, tal que $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=a$.

Considere as sequências $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ e $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$. Temos que

$$\lim_{x\to\infty} x_n=0=\lim_{x\to\infty} y_n.$$

Mas,

$$\lim_{x\to\infty} sen\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{x\to\infty} sen(2n\pi) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty} sen\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{x\to\infty} sen\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Portanto, pela proposição mencionada, o $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Solução 2.

Usando somente a definição:

Seja dado $\delta > 0$. Pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{2\delta}$. Isto é, $\delta > \frac{1}{2n}$. Tomando-se $x = \frac{1}{2n\pi}$ e $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$, $L \in \mathbb{R}$, temos:

$$|x - 0| = \left|\frac{1}{2n\pi} - 0\right| = \frac{1}{2n\pi} < \frac{\delta}{\pi} < \delta$$

e

$$|f(x) - L| = \left|sen\left(\frac{1}{x}\right) - L\right| = |sen(2n\pi) - L| = |L| \geq \frac{|L|}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, pela definição de limite, segue que $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Observação 1: Porém o $\lim_{x\to 0} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ existe e é fácil provar pela definição que ele é nulo.

Observação 2: O exercício 3.1.2. pode ser feito usando a mesma ideia da solução 1 do exercício 3.1.3. Basta tomarmos duas sequências: $x_n \to a$ por valores racionais e $y_n \to a$ por valores irracionais (lembrando que isso é possível uma vez que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são densos em $\mathbb{R}$). Teremos claramente que $f(x_n) \to 0$ e $f(y_n) \to 1$.

Exercício 3.1.4. Sejam f e g funções com domínio $A \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de A. Assuma que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$.

Prove que

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M.$$

Solução. Seja dado $\varepsilon > 0$. Analisemos:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-LM| &= |f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-LM| \\
&\leq |f(x)g(x)-Lg(x)|+|Lg(x)-LM| \\
&= |f(x)-L||g(x)|+|L||g(x)-M|.
\end{aligned}$$

Logo, afim de que tenhamos $|f(x)g(x)-LM| < \varepsilon$, para $x \in A$ próximo a (mas diferente de) a, é suficiente que tenhamos cada uma das parcelas $|f(x)-L||g(x)|$ e $|L||g(x)-M|$ menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Para tanto, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ então tomando-se $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta_1 > 0$ tal que $x \in A$ com a propriedade $0 < |x-a| < \delta_1$ implica em $|g(x)-M| < 1$. Por ser, $|g(x)|-|M| \leq |g(x)-M|$, temos ainda que

$$|g(x)| \leq |M|+1. \quad \textbf{(1)}$$

Por outro lado, se tomarmos $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(|L|+1)} > 0$ deve existir $\delta_2 > 0$ tal que, se $0 < |x-a| < \delta_2$ então

$$|g(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}. \quad \textbf{(2)}$$

E, já que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então para $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)} > 0$ deve existir $\delta_3 > 0$ tal que, se $0 < |x-a| < \delta_3$ então

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}. \quad \textbf{(3)}$$

Assim, escolhendo-se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, então $\delta > 0$ e para todo $x \in A$ com a propriedade $0 < |x-a| < \delta$ temos por **(1), (2) e (3)** que

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-LM| &\leq |f(x)-L||g(x)|+|L||g(x)-M| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \cdot (|M|+1) + |L| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|L|}{|L|+1} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|L|}{|L|} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.