Professor: Alessandro Monteiro
Curso: Introdução à Análise
Lista 2: Números Reais

1. Defina Corpo.
   1.1. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos? Justifique.
2. Sejam *a* e *b* elementos de um corpo *K*. Mostre que se $a+b=a$ então $b=0$.
3. Dado $x \in \mathbb{R}-\{0\}$. Mostre que:
   2.1 Existe um único real y tal que $xy=1$.
   2.2 $\left(x^{-1}\right)^{-1}=x$.
4. Dado $x, y \in \mathbb{R}-\{0\}$. Mostre que $(x \cdot y)^{-1}=x^{-1} \cdot y^{-1}$.
5. Sejam *a, b, c* e *d* elementos de um corpo *K*. Sendo *b* e *d* diferentes de zero. Prove que:
   5.1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.
   5.2. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}=\dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
6. Defina Corpo Ordenado.
   5.1 O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um corpo ordenado? Justifique.
7. Sejam *x, y* e *z* elementos de um corpo ordenado *K*. Mostre que:
   7.1. $x<y$ e $y<z$ então $x<z$.
   7.2. ou $x=y$, ou $x<y$, ou $x>y$.
   7.3. $x<y \Rightarrow x+z<y+z$.
   7.4. $x<y$ e $\begin{cases} z>0 \Rightarrow xz<yz \\ z<0 \Rightarrow xz>yz \end{cases}$.
8. Mostre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x<z<y$.
9. Dados $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que:
   9.1. $x \cdot y=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$.
   9.2. $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.
10. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com *x,y>0*. Mostre que
$$x<y \Leftrightarrow x^{-1}>y^{-1}.$$
11. Defina:
    11.1. Conjunto Limitado Inferiormente (Superiormente).

11.2. Conjunto Limitado.
11.3. Cota Inferior (Superior).
11.4. Corpo Ordenado Completo.

12. Enuncie o axioma do Supremo.
13. Defina Valor Absoluto.
14. Sejam a e b números reais. Mostre que:
    14.1. $|a+b| \leq |a|+|b|$.
    14.2. $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$.
    14.3. $|a-b| \leq |a|+|b|$;
    14.4. $|a|-|b| \leq ||a|-|b|| \leq |a-b|$.
15. Você viu nas aulas que $\sqrt{2}$ é irracional. Use este fato para provar por absurdo que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ também é irracional.
16. Prove que num corpo ordenado K as seguintes condições são equivalentes.
    i) $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;
    ii) Dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.
    iii) Dado qualquer $a > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.
17. Defina Corpo Arquimediano.
18. Prove que para todo $r \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$.
19. Defina Conjunto Denso.
20. Prove que se $a < b$ em $\mathbb{R}$, então $(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.
21. Prove que se $a < b$ em $\mathbb{R}$, então $(a,b) \cap \mathbb{I} \neq \varnothing$.
22. Defina:
    22.1. Supremo de um conjunto.
    22.2. Ínfimo de um Conjunto.
23. Seja $A \subset \mathbb{R}$ com $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existem $a, b \in A$ tal que:
    i) $\sup A - a < \varepsilon$;
    ii) $b - \inf A < \varepsilon$.
24. Seja $A = \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Mostre que $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$.
25. Seja $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Prove que $\inf X = 0$.
26. Suponha que $A \subset B$ são subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Então:
    i) $\sup B \geq \sup A$;
    ii) $\inf B \leq \inf A$.
27. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ limitados e não vazios. Defina:

$$A + B = \{x + y; x \in A \text{ e } y \in B\}$$

$$A - B = \{x - y; x \in A \text{ e } y \in \mathrm{B}\}.$$

Prove que:

i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

ii) $\sup(A-B) = \sup A - \sup B$.

28. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ limitados e não vazios. Prove que:

i) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

ii) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

29. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio, limitado. Dado $c > 0$, seja $c \cdot A = \{c \cdot x; x \in A\}$.

Prove que $c \cdot A$ é limitado e que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.

30. Sejam A, B conjuntos não vazios de números reais, tais que $x \in A,\ y \in B \Leftrightarrow x \leq y$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove que $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

31. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não vazio, limitado superiormente, e c um número real. Tem-se $c \leq \sup X$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ dado pode-se achar $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$.

32. Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados. Se para cada $a \in A$ e cada $b \in B$ existem $a' \in A$ e $b' \in B$ tais que $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.