2ª Lista de Matemática Elementar I

Professor: Alessandro Monteiro

Curso: Licenciatura em Matemática (vespertino e noturno)

01. Escreva e demonstre todas as identidades algébricas vistas nas aulas. Pesquise também sobre as identidades de Sophie Germain, Lagrange, Candido, Fibonacci-Brahmagupta, Platão e Cauchy.

02. Sejam a e b números reais tal que $ab = 1$ e $a \neq b$. Simplifique a expressão

$$\frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)}{a^2 - b^2}.$$

03. Se $a^2 + b^2 = 1$, encontre o valor de $\frac{1 - 3(ab)^2}{a^6 + b^6}$.

04. Sejam a, b, c e d números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$. Se $ac + bd = \frac{\sqrt{3}}{2}$, encontre o valor de $ad - bc$.

05. Sejam a e b inteiros distintos. Encontre em termos de a e b o quociente da divisão de $a^{64} - b^{64}$ por $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

06. Sendo $n > 1$ inteiro e $a, b \in \mathbb{R}$, prove que as seguintes fatorações são válidas:

a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$.

b) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$, onde n é ímpar.

07. Prove a fórmula do radical duplo também conhecida como fórmula de Bhaskara: se a e b são números reais tal que $a^2 \geq b$, então

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

08. Sejam a, b e c racionais distintos. Se $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$, então prove que $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$.

09. Simplifique

$$\sqrt[2003]{2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4006]{89 + 12\sqrt{55}}.$$

10. Calcule

$$\frac{\left(10^4+324\right)\cdot\left(22^4+324\right)\cdot\left(34^4+324\right)\cdot\left(46^4+324\right)\cdot\left(58^4+324\right)}{\left(4^4+324\right)\cdot\left(16^4+324\right)\cdot\left(28^4+324\right)\cdot\left(40^4+324\right)\cdot\left(52^4+324\right)}.$$

11. Resolva a equação

$$(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504.$$

12. Determine o valor da expressão

$$\frac{\left(2004^2-2010\right)\cdot\left(2004^2+4008-3\right)\cdot(2005)}{(2001)\cdot(2003)\cdot(2006)\cdot(2007)}.$$

13. Se $a+b+c=0$, então $a^3+b^3+c^3$ é igual a?

14. Racionalizando $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, temos:

a) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$　　b) $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$　　c) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{2-2\sqrt{2}}$　　e) $4\sqrt{2}$

15. O denominador da fração irredutível, resultante da racionalização de $\dfrac{1}{6\sqrt{50-5\sqrt{75}}-\sqrt{128-16\sqrt{48}}}$ é:

a) 1　　b) 22　　c) 33　　d) 44　　e) 55

16. O valor da expressão $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+10}$ é:

a) -10　　b) -9　　c) 1/9

d) 9　　e) 10

17. Considere as expressões $M=\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ e $N=\dfrac{\sqrt[3]{16}-1}{\sqrt[3]{4}+1}$. O valor de $\dfrac{M}{N}$ é:

a) 1　　b) $\sqrt[3]{2}+1$　　c) $\sqrt[3]{4}-1$　　d) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$　　e) $\sqrt[3]{2}-1$

18. Simplificando a expressão numérica $\dfrac{6\cdot\sqrt[3]{3}+4\cdot\sqrt[3]{9}+9}{3\cdot\sqrt[3]{3}+2\cdot\sqrt[3]{9}+4}$, obtemos:

a) $\sqrt[3]{3}$　　b) $\sqrt[3]{9}$　　c) $3\cdot\sqrt[3]{3}$　　d) $6\cdot\sqrt[3]{3}$　　e) $3\cdot\sqrt[3]{9}$

19. Racionalizando a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}+1}$, obtemos:

a) $\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt[4]{12}}{4}$ c) $\frac{1-\sqrt[4]{12}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}$

20. O denominador da fração irredutível, resultante da racionalização de $\frac{1}{\sqrt{7+2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{5})}}$ é igual a:

a) 9 b) 11 c) 13 d) 27 e) 55

21. Racionalizar o denominador da fração M abaixo:

$$M = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$$

a) $M=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ b) $M=\sqrt[3]{6}$ c) $M=\sqrt[3]{2}$

d) $M=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ e) $M=\sqrt[3]{3}$

22. Racionalize $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

a) $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{70}}{20}$ b) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{70}}{20}$ c) $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{70}}{20}$

d) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{70}}{20}$ e) $-\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{70}}{20}$

23. Racionalizando $\frac{4}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}$ obtemos:

a) 2 b) 4 c) $\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}$

d) $\frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}{2}$ e) $2\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}\right)$

24. Racionalizando a expressão $\frac{25}{3-\sqrt[3]{2}}$, obtemos:

a) $9-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$
b) $3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$
c) $9+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$
d) $3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$
e) $9+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

25. Após racionalizar $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}}$**, o** denominador encontrado é igual a:

a) 2 b) 5 c) 11

d) 13 e) 17

26. Se $E = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$ então E é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$ b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}+1}{2}$

d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}-1}{6}$

27. Racionalizando $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$, o denominador encontrado é igual a:

a) 1 b) 42 c) 190

d) 260 e) 350

28. Racionalize $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$.

29. Racionalize

$$\frac{1}{\left(\sqrt[64]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}.$$

30. Determine os racionais a, b e c tais que

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$